ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}

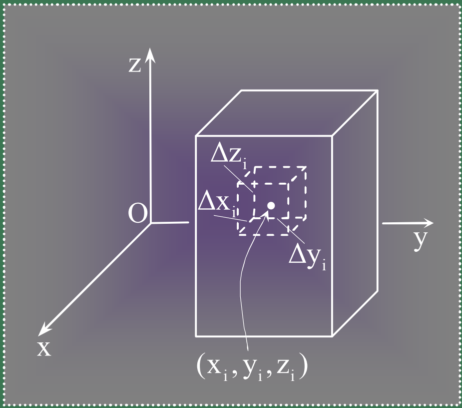
ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Τα τριπλά ολοκληρώματα ορίζονται με τρόπο ανάλογο με τα διπλά ολοκληρώματα.

Ισχύουν ανάλογα θεωρήματα ολοκληρωσιμότητας και ανάλογες ιδιότητες. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ συνεχή σε μια περιοχή S στο χώρο, που για λόγους ευκολίας τη θεωρούμε ορθογώνιο παραλλελεπίπεδο.

$$S=\{(x,y,z)\ :\ \alpha\le x\le\beta,\ \gamma\le y\le\delta,\ \varepsilon\le z\le\eta\}$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα της f πάνω στην περιοχή S μπορεί να οριστεί με τον ακόλουθο τρόπο.



Διαμερίζουμε την περιοχή S σε μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα

$$S_i,\ i=1,2,...,n$$

και έστω

$$\Delta V_i=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z,\ i=1,2,...,n$$

ο όγκος του ορθογωνίου S_i.

Έστω επίσης τυχαίο σημείο (x_i,y_i,z_i) του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου S_i.

Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i \quad (1)$$

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στην περιοχή S, καθώς τα Δx, Δy, Δz πλησιάζουν όλα στο μηδέν, το όριο του αθροίσματος (1) ονομάζεται τριπλό ολοκλήρωμα της f πάνω στη περιοχή S και συμβολίζεται με

$$\iiint_S f(x,y,z)dV \quad \text{ή} \quad \iiint_S f(x,y,z)dxdydz$$

Δηλαδή είναι

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} f(xi, yi, zi)\Delta Vi$$

Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_\varepsilon^\eta f(x,y,z)dzdydx\,, \quad (2)$$

Στο επαναληπτικό ολοκλήρωμα η πρώτη ολοκλήρωση γίνεται ως προς z θεωρώντας τα x, y ως σταθερές, η δεύτερη ολοκλήρωση γίνεται ως προς y θεωρώντας το x ως σταθερά και η τελευταία ολοκλήρωση γίνεται ως προς x.

Υπάρχουν συνολικά $3! = 6$ ισοδύναμες μορφές του ολοκληρώματος, όπως

$$\int_\alpha^\beta \int_\varepsilon^\eta \int_\gamma^\delta f(x,y,z)dydzdx, \quad \int_\varepsilon^\eta \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x,y,z)dydxdz\,, \text{ κ.λ.π.}$$

Ιδιότητες του τριπλού ολοκληρώματος.

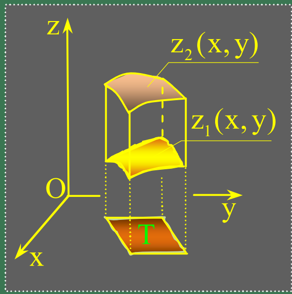
Τα τριπλά ολοκληρώματα έχουν τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες με τα διπλά ολοκληρώματα. Για τις συναρτήσεις $f = f(x,y,z)$ και $g = g(x,y,z)$ ισχύουν τα παρακάτω.

1. $\iiint\limits_S k\, f dV = k \iiint\limits_S f dV$
2. $\iiint\limits_S [f \pm g] dV = \iiint\limits_S f dV \pm \iiint\limits_S g dV$
3. $\iiint\limits_S f dV \geq 0$ αν $f \geq 0$ στη περιοχή S
4. $\iiint\limits_S f dV \geq \iiint\limits_S g dV$ αν $f \geq g$ στη περιοχή S
5. $\iiint\limits_S f dV = \iiint\limits_{S_1} f dV + \iiint\limits_{S_2} f dV$

όπου S_1, S_2 υποπεριοχές στις οποίες χωρίζεται η περιοχή S, από ομαλές επιφάνειες.

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό τόπο S, ο οποίος φράσσεται κάτω από την επιφάνεια $z = z_1(x,y)$ και άνω από την επιφάνεια

$z=z_2(x,y)$ Έστω ακόμη ότι T είναι η κοινή προβολή των επιφανειών αυτών στο επίπεδο Oxy.



Τότε ισχύει:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$=\iint_T\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

Δηλαδή

Η ολοκλήρωση γίνεται πρώτα ως προς z, διατηρώντας σταθερά τα x και y, και στη συνέχεια υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης που προκύπτει, στον τόπο T του επιπέδου Oxy.

Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με μετασχηματισμό

Ένα τριπλό ολοκλήρωμα είναι δυνατόν να υπολογιστεί πιο εύκολα αντικαθιστώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις συντεταγμένες (u, υ, w) ενός άλλου συστήματος.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό.

$$x=x(u,\upsilon,w),\quad y=y(u,\upsilon,w),\quad z=z(u,\upsilon,w)$$

Έτσι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x,y,z)$ μετασχηματίζεται στη συνάρτηση

$$f\big(x=x(u,\upsilon,w),\ y=y(u,\upsilon,w),\ z=z(u,\upsilon,w)\big)$$

η στερεά περιοχή S απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα στη στερεά περιοχή S_1.

Επιπλέον είναι $dxdydz=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,\upsilon,w)}\right|dud\upsilon dw$.

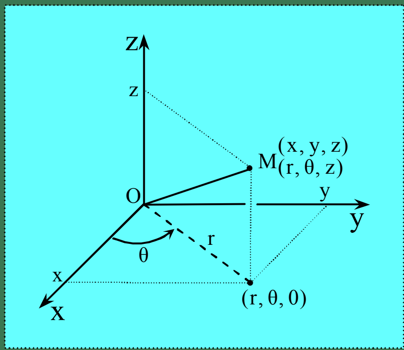
Με βάση τα παρακάτω έχουμε:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz=$$

$$=\iiint_{S_1} f\left[x(u,\upsilon,w),\ y(u,\upsilon,w),\ z(u,\upsilon,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,\upsilon,w)}\right|dud\upsilon dw$$

Μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta,\ z = z$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x,y,z)$ παίρνει τη μορφή $f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z)$. Η στερεά περιοχή S μετασχηματίζεται αμφιμονοσήμαντα στη στερεά περιοχή S_1.



Ακόμα είναι

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,z)}\right| dr\,d\vartheta\,dz \Rightarrow dxdydz = r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

οπότε:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S_1} f[r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z]\,r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

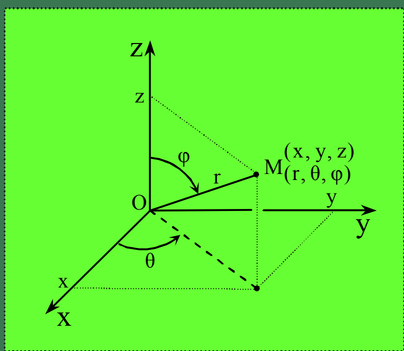
Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι χρήσιμες σε εφαρμογές στις οποίες ο τόπος ολοκλήρωσης έχει άξονα συμμετρίας μία ευθεία την οποία θεωρούμε ως άξονα των z.

Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $x = r\cos\vartheta\sin\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\varphi$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x,y,z)$ παίρνει τη μορφή

$$f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

Η στερεά περιοχή S μετασχηματίζεται αμφιμονοσήμαντα στη στερεά περιοχή S_1. Ακόμα είναι



$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,z,\vartheta)}\right| dr\,d\vartheta\,dz \Rightarrow dx\,dy\,dz = r^2 \sin\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

οπότε:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S_1} f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

Οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι χρήσιμες σε εφαρμογές στις οποίες ο τόπος ολοκλήρωσης: έχει κέντρο συμμετρίας που θεωρούμε ως αρχή των αξόνων, περιέχει επίπεδα στο οποίο περιέχεται ο άξονας των z, ή είναι κώνος με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα των z.

Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων

1. Όγκος.

Ο όγκος V του στερεού S δίνεται από τον τύπο

$$V = \iiint_S dxdydz$$

2. Μάζα.

Αν σε μία στερεά περιοχή S είναι κατανεμημένη μάζα με συνάρτηση πυκνότητας $\delta = \delta(x,y,z)$, η συνολική μάζα M που κατανέμεται στην περιοχή S δίνεται από τον τύπο:

$$M = \iiint_S \delta(x,y,z)\,dxdydz$$

3. Οι πρώτες ροπές ως προς τα συντεταγμένα επίπεδα δίνονται από τους τύπους

$$M_{xy} = \iiint_S z\,\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

$$M_{xz} = \iiint_S y\,\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

$$M_{yz} = \iiint_S x\,\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

4. Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας δίνονται από τους τύπους

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M},\quad \overline{y}=\frac{M_{xz}}{M},\quad \overline{z}=\frac{M_{xy}}{M}$$

5. Οι ροπές αδράνειας του στερεού ως προς τους άξονες των συντεταγμένων δίνονται από τους τύπους

$$I_x=\iiint_S\left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz$$

$$I_y=\iiint_S\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz$$

$$I_z=\iiint_S\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)dxdydz$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_1^2\int_0^x\int_2^{y-2}4z\,dzdydx}$**.**

Λύση

$$I=\int_1^2\int_0^x\left(\int_2^{y-2}4z\,dz\right)dy\,dx=\int_1^2\int_0^x\left[2z^2\right]_2^{y-2}dy\,dx=\int_1^2\int_0^x\left[2\left(y-2\right)^2-8\right]dy\,dx=$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^x\left[2y^2-8y\right]_2^{y-2}dy\right)dx=\int_1^2\left[2\frac{y^3}{3}-4y^2\right]_0^x dx=\int_1^2\left(\frac{2}{3}x^3-4x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{6}-\frac{4x^3}{3}\right]_1^2=-\frac{41}{6}$$

2. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_1^2\int_0^x\int_y^{y^2}\frac{120z}{y}dzdydx}$**.**

Λύση

$$I=\int_1^2\int_0^x \frac{120}{y}\left(\int_y^{y^2} z\,dz\right)dydx=\int_1^2\int_0^x \frac{120}{y}\left[\frac{z^2}{2}\right]_y^{y^2}dydx=\int_1^2\int_0^x \frac{120}{y}\left[\frac{y^4}{2}-\frac{y^2}{2}\right]dydx=$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^x 60\left(y^3-y\right)dy\right)dx=\int_1^2 60\left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx=\int_1^2 60\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(15x^4-30x^2\right)dx=\left[15\frac{x^5}{5}-30\frac{x^3}{3}\right]_1^2=23$$

3. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $I=\int_1^2\int_1^e\int_1^{xy^2}\left(\frac{xy}{z^2}\right)dzdydx$.

Λύση

$$I=\int_1^2\int_1^e xy\left(\int_1^{xy^2}\frac{1}{z^2}dz\right)dy\,dx=-\int_1^2\int_1^e xy\left[\frac{1}{z}\right]_1^{xy^2}dy\,dx=-\int_1^2\int_1^e xy\left(\frac{1}{xy^2}-1\right)dy\,dx=$$

$$=-\int_1^2\left(\int_1^e\left(\frac{1}{y}-xy\right)dy\right)dx=-\int_1^2\left[\ell n|y|-x\frac{y^2}{2}\right]_1^e dx=-\int_1^2\left(\ell ne-\frac{e^2}{2}x+\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=-\left[x-\frac{e^2x^2}{4}+\frac{x^2}{4}\right]_1^2=-\left[2-e^2+1\right]+\left[1-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{4}\left(3e^2-7\right)$$

4. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $I=\int_1^3\int_1^{1/x^2}\int_0^y\frac{16x^3z}{y}dzdydx$.

Λύση

$$I=\int_1^e\int_1^{1/x^2}\frac{16x^3}{y}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^y dydx=\int_1^e\int_1^{1/x^2}\frac{16x^3}{y}\frac{y^2}{2}dydx=\int_1^e\int_1^{1/x^2}8x^3ydydx=$$

$$=\int_1^e 8x^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{1/x^2}dx=\int_1^3 4x^3\left(\frac{1}{x^4}-1\right)dx=4\int_1^3\left(\frac{1}{x}-x^3\right)dx=$$

$$=4\left[\ell n|x|-\frac{x^4}{4}\right]_1^e=4\left[\ell ne-\frac{e^4}{4}-\ell n1+\frac{1}{4}\right]=$$

$$\Rightarrow I=5-e^4$$

5. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\pi/2}\int_0^x\int_{\sin y}^{\cos y}dzdydx$.

Λύση

$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^x\left(\int_{\sin y}^{\cos y}dz\right)dydx=\int_0^{\pi/2}\int_0^x[z]_{\sin y}^{\cos y}dydx=\int_0^{\pi/2}\int_0^x(\cos y-\sin y)dydx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}[\sin y+\cos y]_0^x dx=\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x-\sin 0-\cos 0)dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\sin x+\cos x-1)dx=[-\cos x+\sin x-x]_0^{\pi/2}=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\cos 0-\sin 0+0=$$

$$\Rightarrow I=1-\frac{\pi}{2}+1=2-\frac{\pi}{2}=\frac{4-\pi}{2}$$

6. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{1}^{e^{\sin y}}\frac{1}{z}dzdydx}$ **.**

Λύση

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{\pi/2}^{x}\left(\int_{1}^{e^{\sin y}}\frac{1}{z}dz\right)dydx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{\pi/2}^{x}\left[\ell n|z|\right]_1^{e^{\sin y}}dydx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{\pi/2}^{x}\left(\ell ne^{\sin y}-\ell n1\right)dydx=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{\pi/2}^{x}\sin y\,dydx=-\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\cos y\right]_{\pi/2}^{x}dx=-\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\right)dx=$$

$$=-\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\,dx=-\left[\sin x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{6}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

7. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_{0}^{2}\int_{1}^{2x}\int_{1}^{e^{xy}}\frac{2x}{z}dzdydx}$ **.**

Λύση

$$I=\int_{0}^{2}\int_{1}^{2x}2x\left[\ell n|z|\right]_1^{e^{xy}}dydx=\int_{0}^{2}\int_{1}^{2x}2x\left[\ell n\left|e^{xy}\right|-\ell n1\right]dydx=\int_{0}^{2}\int_{1}^{2x}2x^2y\,dydx=$$

$$=\int_{0}^{2}x^2\left[y^2\right]_1^{2x}dx=\int_{0}^{2}x^2\left(4x^2-1\right)dx=\int_{0}^{2}\left(4x^4-x^2\right)dx=$$

$$=\left[4\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4\cdot 2^5}{5}-\frac{2^3}{3}=\frac{344}{15}$$

8. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $I=\int_1^2\int_1^x\int_0^{\sqrt{y/x}} 24xyz\,dx\,dy\,dz$.

Λύση

$$I=\int_1^2\int_1^x 12xy\left[z^2\right]_0^{\sqrt{x/y}}dxdy=\int_1^2\int_1^x 12xy\frac{y}{x}dxdy=\int_1^2 4\left[y^3\right]_1^x dx=$$

$$=\int_1^2\left(4x^3-4\right)dx=\left[x^4-4x\right]_1^2=2^4-4\cdot 2-1+4=11$$

9. Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2\int_4^{x^2}\int_1^{e^{xy}}\frac{x\sqrt{y}}{z}dzdydx$.

Λύση

$$I=\int_0^2\int_0^{x^2} x\sqrt{y}\left[\ell n\,|\,z\,|\right]_1^{e^{xy}}dy\,dx=\int_0^2\int_0^{x^2} x\sqrt{y}\left[\ell n\,|\,e^{xy}\,|-\ell n1\right]_1^{e^{xy}}dy\,dx=$$

$$=\int_0^2\int_0^{x^2} x^2y^{3/2}\,dydx=\frac{2}{5}\int_0^2 x^2\left[y^{5/2}\right]_0^{x^2}dx=$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^2 x^7dx=\frac{1}{20}\left[x^8\right]_0^2=\frac{2^8}{20}=\frac{64}{5}$$

10. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$.

Λύση

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\left(\int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr\right)d\varphi\;d\vartheta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi}d\varphi\;d\vartheta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\cos^3\varphi\,(\cos\varphi)'\,d\varphi d\vartheta = -\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[\cos^4\frac{\pi}{4} - \cos^4 0\right]d\vartheta \;= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{1}{2}[\vartheta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}2\pi \Rightarrow I = \pi$$

11. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I = \iiint_S \left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 + \left(x^2+y^2+z^2\right)\right] dx\, dy\, dz}$$

όπου $\mathbf{S = \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}}$

Λύση

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες

Θέτουμε:

$$x = r\cos\vartheta\sin\varphi\,,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\quad z = r\cos\varphi$$

Είναι:

$$0 \le r \le 1\,,\quad 0 \le \vartheta \le 2\pi\,,\quad 0 \le \varphi \le \pi\,,\quad dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\; dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

οπότε:

$$I = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(r^4+r^2\right)r^2\sin\varphi\,drd\vartheta d\varphi = -\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(r^6+r^4\right)\left[\cos\varphi\right]_0^{\pi} drd\vartheta =$$

$$= -\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(r^6+r^4\right)(-1-1)\,drd\vartheta = 2\int_0^1\left(r^6+r^4\right)[\vartheta]_0^{2\pi}\,dr =$$

$$= 4\pi\left[\frac{r^7}{7}+\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = 4\pi\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right) \Rightarrow I = \frac{48\pi}{35}$$

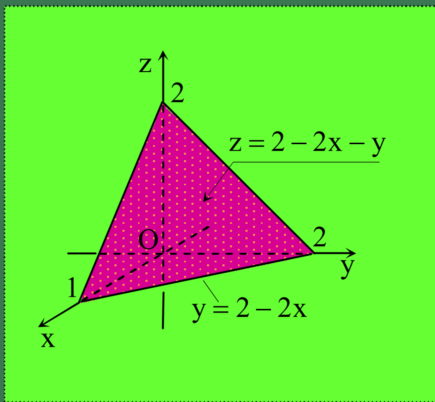
12. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $I=\iiint\limits_S 2x\,dV$, όπου

$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2-2x,\ 0\le z\le 2-2x-y\right\}$

Να δοθεί το σχήμα της περιοχής S.

Λύση

$$I=\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{2-2x-y} 2x\,dzdydx$$



$$=\int_0^1\int_0^{2-2x} 2x[z]_0^{2-2x-y}\,dydx$$

$$=\int_0^1\int_0^{2-2x} 2x(2-2x-y)\,dydx$$

$$=\int_0^1\int_0^{2-2x} (4x-4x^2-2xy)\,dydx$$

$$=\int_0^1\left[4xy-4x^2y-xy^2\right]_0^{2-2x}dx=\int_0^1\left[4x(2-2x)-4x^2(2-2x)-x(2-2x)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(4x^3-8x^2+4x\right)dx=\left[x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

13. Να υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα

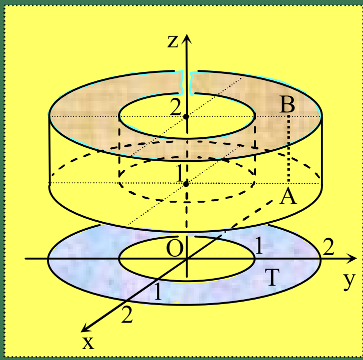
$$I=\iiint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

όπου $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ 1\le z\le 2\right\}$

Να δώσετε το σχήμα του στερεού S.

Λύση

Η προβολή του στερεού S στο επίπεδο Oxy.
είναι ο κυκλικός δακτύλιος
$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$.



Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα z΄z που περνάει από ένα σημείο του στερεού S και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=1$ και $z=2$.
Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες.
Θέτουμε:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,\quad z=z$$

Είναι:

$$1\le r\le 2,\quad 0\le\vartheta\le 2\pi,\quad 1\le z\le 2,\quad dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

Άρα έχουμε:

$$I=\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_1^2 z\,r^2 dr d\vartheta dz=\int_1^2\int_0^{2\pi} r^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^2 dr d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\int_0^{2\pi} r^2(4-1)dr d\vartheta=\frac{3}{2}\int_0^1 r^2\left[\vartheta\right]_0^{2\pi}dr$$

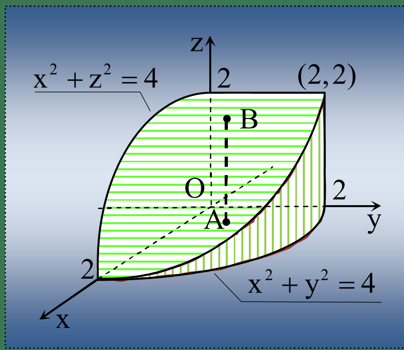
$$=\frac{3}{2}\int_2^2 r^2 2\pi dr=3\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2=3\pi\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow I=7\pi$$

Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος

14. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τους κυλίνδρους $x^2+z^2=4$ και $x^2+y^2=4$.

Λύση

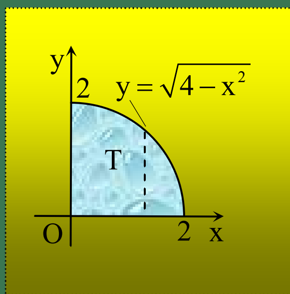
Υπολογίζουμε τον όγκο του στερεού S που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο. Η προβολή του στερεού στο επίπεδο 0xy είναι το χωρίο



$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 4,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\right\}.$$

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα z΄z που περνάει από ένα σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με: $z=0$ και $z=\sqrt{4-x^2}$ αντίστοιχα.

Επίσης είναι:



$$0\le x\le 2,\quad 0\le y\le\sqrt{4-x^2}$$

$$V_1=\iiint\limits_S dxdydz=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_1^{\sqrt{4-x^2}}dz\right)dxdy$$

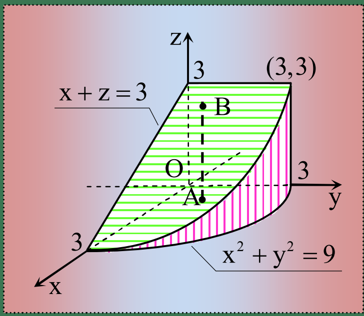
$$=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left[z\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dxdy=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\left[y\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx==\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=8-\frac{8}{3}\Rightarrow V_1=\frac{16}{3}$$

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι $V=8V_1=8\cdot\frac{16}{3}=\frac{128}{3}$.

15. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού S που περικλείεται από τις επιφάνειες $x^2+y^2=9$, $x+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Λύση



Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα z΄z που περνάει από ένα σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία Α και Β με $z=0$ και $z=3-x$ αντίστοιχα, οπότε: $0\le z\le 3-x$.

Η προβολή του στερεού S στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Θέτουμε:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,\quad z=z$$

Είναι:

$$0\le r\le 3,\quad 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le z\le 3-r\cos\vartheta,\quad dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

Ο όγκος του στερεού δίνεται από τον τύπο

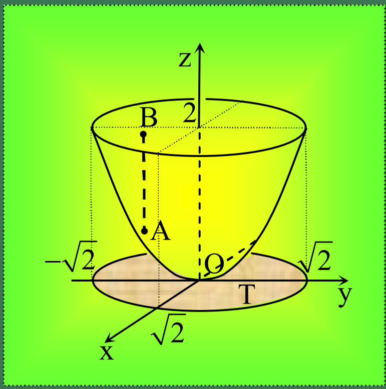
$$V=\iiint\limits_S dxdydz=\int_0^3\int_0^{\pi/2}\int_1^{3-r\cos\vartheta} r\,drd\vartheta dz=\int_0^3\int_0^{\pi/2} r\left[z\right]_0^{3-r\cos\vartheta}drd\vartheta$$

$$=\int_0^3\int_0^{\pi/2} r\left(3-r\cos\vartheta\right)drd\vartheta=\int_0^{\pi/2}\int_0^3\left(3r-r^2\cos\vartheta\right)drd\vartheta=\int_0^{\pi/2}\left[3\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\vartheta\right]_0^3 d\vartheta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{27}{2}-9\cos\vartheta\right)d\vartheta=\left[\frac{27}{2}\vartheta-9\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2}\Rightarrow V=\frac{27\pi-36}{4}$$

16. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού S που περικλείεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 2$.

Λύση



Απαλείφουμε το z από τις εξισώσεις του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ και $z = 2$ και βρίσκουμε ότι η τομή τους είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$. Η προβολή του στερεού S στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο

$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } x^2 + y^2 \le 2\right\}$.

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα z΄z που περνάει από ένα σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z = x^2 + y^2$ και $z = 2$ αντίστοιχα, οπότε:

$$x^2 + y^2 \le z \le 2.$$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Θέτουμε:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z$$

Είναι:

$$0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad x^2 + y^2 = r^2 \le z \le 2, \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

Ο όγκος του στερεού S δίνεται από τον τύπο

$$V = \iiint\limits_S dxdydz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2} r\,drd\vartheta dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r\left[z\right]_{r^2}^{2} drd\vartheta$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r\left(2 - r^2\right)drd\vartheta = \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r - r^3\right)\left[\vartheta\right]_0^{2\pi} dr$$

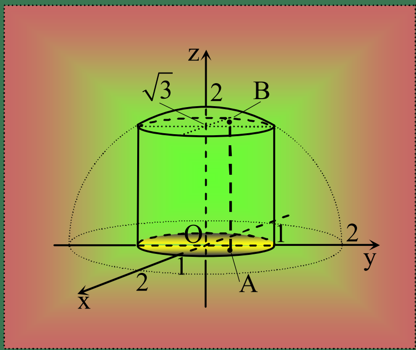
$$= 2\pi\left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(2 - 1) \Rightarrow V = 2\pi$$

17. Στερεό S περικλείεται από τις επιφάνειες: σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$, κύλινδρο $x^2+y^2=1$, xy – επίπεδο και ισχύει $z\geq 0$.

Η πυκνότητα της μάζας του στερεού είναι ανάλογη της απόστασης από το xy – επίπεδο. Να δοθεί το σχήμα και να υπολογιστεί η μάζα του στερεού.

Λύση

Η τομή της σφαίρας και του κυλίνδρου είναι ο κύκλος $x^2+y^2=1$ του επιπέδου $z=\sqrt{3}$.



$$\left(\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \overset{z\geq 0}{\Longrightarrow} z=\sqrt{3}\Bigg)$$

Το στερεό S περιέχεται στον κύλινδρο $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq\sqrt{3}$ και στο μονοβασικό σφαιρικό τμήμα.

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad \sqrt{3}\leq z\leq 2$$

Η προβολή του στερεού S στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο.

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\leq 1\right\}$$

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα z΄z που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=0$ και $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ αντίστοιχα.

Είναι λοιπόν: $0\leq z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Η πυκνότητα του στερεού είναι $\delta(x,y,z)=kz$

Η μάζα του στερεού S δίνεται από τον τύπο

$$M=\iiint_S \delta(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iint_T \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} kz\,dz\,dx\,dy=\frac{k}{2}\iint_T \left[z^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy$$

$$\Rightarrow M = \frac{k}{2}\iint_T \left(4 - x^2 - y^2\right)dxdy \quad (1)$$

Υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα (1) με πολικές συντεταγμένες.

Θέτουμε:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

Είναι:

$0 \le r \le 1$, $\quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$, $\quad dxdy = rdrd\vartheta$, οπότε

$$M = \frac{k}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(4 - r^2\right)rdrd\vartheta = \frac{k}{2}\int_0^1\left(4r - r^3\right)dr\int_0^{2\pi}d\vartheta$$

$$= \frac{k}{2}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[\vartheta\right]_0^{2\pi} = \frac{k}{2}\left(2 - \frac{1}{4}\right)2\pi$$

$$\Rightarrow M = \frac{7k\pi}{4}$$

18. Στερεό περικλείεται από τις επιφάνειας $z = 9$ και $z = x^2 + y^2$. Η πυκνότητά του είναι ανάλογη της απόστασης από το xy - επίπεδο. Να δοθεί το σχήμα και τα ολοκληρώματα (τόσο σε καρτεσιανές όσο και κυλινδρικές συντεταγμένες), που απαιτούνται για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα των z.

Λύση

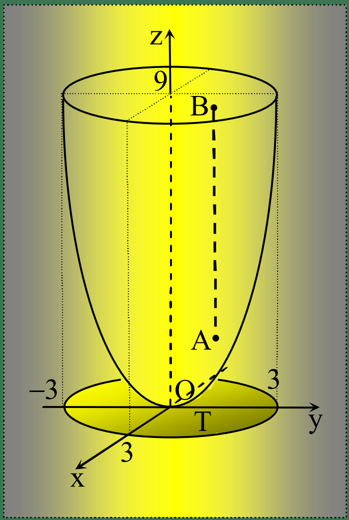
Το στερεό περικλείεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 9$. Η πυκνότητα του στερεού είναι $\delta(x, y, z) = kz$. Η τομή του παραβολοειδούς και του επιπέδου είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$. Η προβολή της επιφάνειας του στερεού πάνω στο επίπεδο 0xy είναι το χωρίο

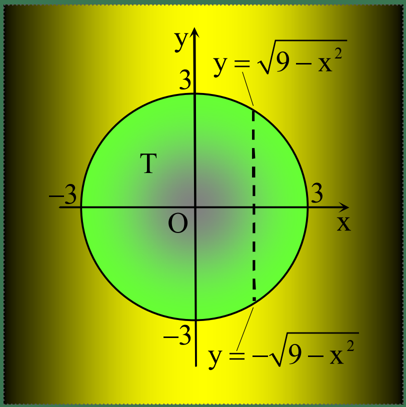
$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 9\right\}$$

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα z΄z που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και

B με $z = x^2 + y^2$ και $z = 9$ αντίστοιχα.

Άρα $x^2 + y^2 \le z \le 9$.





Ακόμα είναι $-\sqrt{9 - x^2} \le y \le \sqrt{9 - x^2}$ και $-3 \le x \le 3$.

Η πυκνότητα του στερεού είναι $\delta(x, y, z) = kz$

Άρα σε καρτεσιανές συντεταγμένες η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα των z δίδεται από τον τύπο:

$$I_z = \iiint_S \left(x^2 + y^2\right) kz\, dxdydz = k \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{9} z^2 dzdydx$$

Μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
Θέτουμε: $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = z$

Είναι: $0 \le r \le 3$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $r^2 \le z \le 9$, $dxdydz = rdrd\vartheta dz$

οπότε το ολοκλήρωμα της ροπής αδράνειας γίνεται:

$$I_z = \iiint_S \left(x^2 + y^2\right) kzdxdydz = k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{9} r^3 zdrd\vartheta dz =$$

$$= k\int_0^3\int_0^{2\pi} r^3\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^{9} drd\vartheta = \frac{k}{2}\int_0^3\int_0^{2\pi} r^3\left(3^4 - r^4\right)drd\vartheta =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^3\left(3^4 r^3 - r^7\right)dr\int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{k}{2}\left[3^4\frac{r^4}{4} - \frac{r^8}{8}\right]_0^3\left[\vartheta\right]_0^{2\pi} =$$

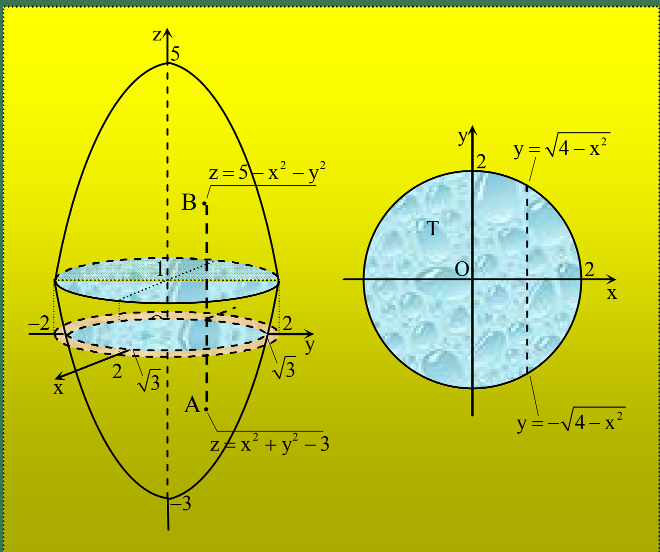
$$= \frac{k}{2}\left(\frac{3^8}{4} - \frac{3^8}{8}\right)\cdot 2\pi = \frac{3^8 k\pi}{8}$$

19. Στερεό S περικλείεται από τα παραβολοειδή

$$z = 5 - x^2 - y^2 \text{ και } z = x^2 + y^2 - 3 .$$

Η πυκνότητά του είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από τον άξονα των z. Να δοθεί το σχήμα του στερεού και να υπολογιστεί η μάζα του.

Λύση



Με απαλοιφή του z από τις εξισώσεις των παραβολοειδών βρίσκουμε την προβολή της επιφάνειας του στερεού S στο επίπεδο Oxy.

Έχουμε:

$$5-x^2-y^2=x^2+y^2-3 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

Άρα η προβολή της επιφάνειας του στερεού στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\le 4\right\}$. Επιπλέον θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα z΄z που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=x^2+y^2-3$ και $z=5-x^2-y^2$ αντίστοιχα.

Είναι:

$$x^2+y^2-3\le z\le 5-x^2-y^2.$$

Η μάζα του στερεού S δίνεται από τον τύπο

$$M=\iiint_S \delta(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{όπου} \quad \delta(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\iint_T \int_{x^2+y^2-3}^{5-x^2-y^2} \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz=\iint_T \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[z\right]_{x^2+y^2-3}^{5-x^2-y^2}dx\,dy$$

$$=k\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[5-x^2-y^2-x^2-y^2+3\right]dxdy$$

$$=2k\iint_T \frac{4-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

Υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες.

Θέτουμε:

$$x=r\cos\vartheta, \quad y=r\sin\vartheta$$

Είναι:

$$0\le r\le 2, \quad 0\le\vartheta\le 2\pi, \quad dx\,dy=r\,dr\,d\vartheta \quad \text{οπότε:}$$

$$M = 2k\int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{4-r^2}{r}\,r\,dr d\vartheta = 2k\int_0^2\left(4-r^2\right)dr\cdot\int_0^{2\pi}d\vartheta =$$

$$= 2k\left[4r-\frac{r^3}{3}\right]_0^2\left[\vartheta\right]_0^{2\pi} = 2k\left(8-\frac{8}{3}\right)2\pi = \frac{64k\pi}{3}$$

20. Το τμήμα του κυλίνδρου $x^2+y^2=9$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=0$ και $z=2$ έχει πυκνότητα ανάλογη της απόστασης από τον άξονα των z.

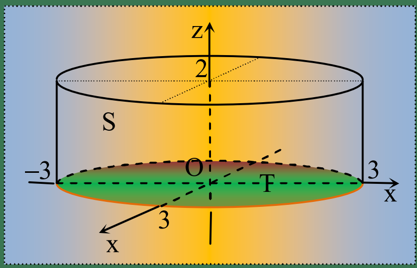
α) Να υπολογιστεί η μάζα του

β) Να δοθούν τα ολοκληρώματα που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της z-συντεταγμένης του κέντρου μάζας και της ροπής αδράνειας γύρω από τον άξονα των z.

Λύση

Η προβολή της επιφάνειας του κυλίνδρου S στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 9\right\}.$$



Επίσης είναι $0\le z\le 2$.

Η μάζα του κυλίνδρου δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$M=\iiint_S \delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\quad \delta(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow M=\iiint_S k\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$x=r\cos\vartheta\,,\quad y=r\sin\vartheta\,,\quad z=z$$

Είναι:

$$0\le r\le 3\,,\quad 0\le\vartheta\le 2\pi\,,\quad 0\le z\le 2\,,\quad dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

οπότε:

$$M = k\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,dr\,d\vartheta\,dz = k\int_0^3\int_0^{2\pi} r^2[z]_0^2\,dr\,d\vartheta$$

$$= 2k\int_0^3 r^2dr\int_0^{2\pi} d\vartheta = 2k\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3[\vartheta]_0^{2\pi} = 2\cdot 9\cdot 2\pi k$$

$$\Rightarrow M = 36k\pi$$

Η z - συντεταγμένη του κέντρου μάζας δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}, \quad \text{όπου} \quad M_{xy} = \iiint_S z\,\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

Είναι $M_{xy} = k\iiint_S z\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$

Μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες και έχουμε

$$M_{xy} = k\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^2 z\,r^2drd\vartheta dz = k\int_0^3\int_0^{2\pi} r^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 drd\vartheta$$

$$= k\int_0^3\int_0^{2\pi} 2r^2drd\vartheta = 2k\int_0^3 r^2dr\int_0^{2\pi} d\vartheta = 2k\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3[\vartheta]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow M_{xy} = 36k\pi$$

οπότε η z - συντεταγμένη του κέντρου μάζας είναι

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{36k\pi}{36k\pi} = 1$$

Η ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα των z δίνεται από τον τύπο.

$$I_z = \iiint_S \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_S \left(x^2+y^2\right) k\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$$

Μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες και έχουμε:

$$I_z = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2\, k\, r\, r\, dr\, d\vartheta\, dz = k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^4\, dr\, d\vartheta\, dz$$

$$= k \int_0^3 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 dz = k \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3 \cdot \left[\vartheta\right]_0^{2\pi} \cdot \left[z\right]_0^2$$

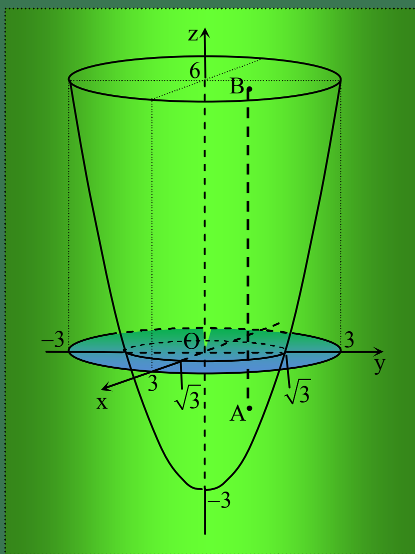
$$\Rightarrow I_z = \frac{4k\pi \cdot 3^5}{5}$$

21. Στερεό S περικλείεται από το επίπεδο $z=6$ και το παραβολοειδές $z=x^2+y^2-3$. Αν το στερεό είναι ομογενές να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των z.

Λύση

Με απαλοιφή του z από τις εξισώσεις $z=6$ και $z=x^2+y^2-3$ έχουμε:

$$6 = x^2+y^2-3 \Leftrightarrow x^2+y^2=9$$



Άρα η προβολή της επιφάνειας του στερεού στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο

$$T = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \le 3^2\right\}.$$

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των z που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού S και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=x^2+y^2-3$ και $z=6$ αντίστοιχα οπότε είναι:

$$x^2+y^2-3\le z\le 6\,.$$

Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον άξονα των z δίνεται από τον τύπο.

$$I_z=\iiint_S\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\quad \text{όπου}\quad \delta(x,y,z)=k$$

$$=\iint_T\int_{x^2+y^2-3}^{6}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=k\iint_T\left(x^2+y^2\right)[z]_{x^2+y^2-3}^{6}\,dxdy$$

$$\Rightarrow I_z=k\iint_T\left(x^2+y^2\right)\left(9-x^2-y^2\right)dxdy$$

Μετασχηματίζουμε σε πολικές συντεταγμένες.

Θέτουμε:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta$$

Είναι:

$$0\le r\le 3,\quad 0\le\vartheta\le 2\pi\,,\quad dxdy=rdrd\vartheta\quad \text{οπότε:}$$

$$I_z=k\int_0^3\int_0^{2\pi}r^2\left(9-r^2\right)rdrd\vartheta=k\int_0^3\int_0^{2\pi}\left(9r^3-r^5\right)drd\vartheta=$$

$$=k\int_0^3\left(9r^3-r^5\right)dr\cdot\int_0^{2\pi}d\vartheta=k\left[9\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^3[\vartheta]_0^{2\pi}=$$

$$=k\left(\frac{9\cdot 3^4}{4}-\frac{3^6}{6}\right)\cdot 2\pi\Rightarrow I_z=\frac{3^5k\pi}{2}$$

22. Στερεό περικλείεται από τις επιφάνειας $z=1$ και $z=5-x^2-y^2$. Η πυκνότητά του είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης κάθε σημείου από το xy απίπεδο. Να δοθούν

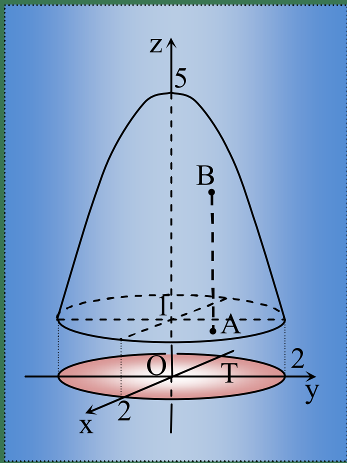
α) το σχήμα και β) τα ολοκληρώματα, χωρίς να υπολογιστούν, που απαιτούνται για τον υπολογισμό της y-συντεταγμένης του κέντρου μάζας του

στερεού τόσο σε καρτεσιανές όσο και σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Λύση

Απαλείφουμε το z από τις εξισώσεις $z=1$ και $z=5-x^2-y^2$ και έχουμε:

$$1=5-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$$



Η προβολή του στερεού στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 4\right\}$$

Η πυκνότητα του στερεού είναι

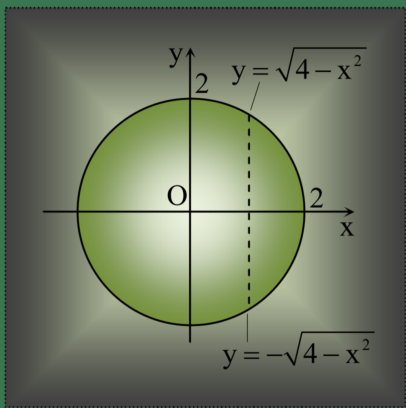
$$\delta(x,y,z)=\frac{k}{z}.$$

Θεωρούμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των z΄z που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=1$ και $z=5-x^2-y^2$ αντίστοιχα.

Άρα $1\le z\le 5-x^2-y^2$.

Ακόμα είναι

$-2\le x\le 2$ και $-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$



Η y-συντεταγμένη του κέντρου μάζας δίνεται από τον τύπο.

$$\bar{y}=\frac{M_{xz}}{M} \quad \text{όπου}$$

$$M_{xz}=\iiint\limits_S y\,\delta(x,y,z)\,dxdydz, \qquad (1)$$

$$M=\iiint\limits_S \delta(x,y,z)\,dxdydz, \qquad (2)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα ολοκληρώματα (1) και (2) είναι:

$$M_{xz} = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{5-x^2-y^2} y\frac{k}{z} dxdydz$$

$$\Rightarrow M_{xz} = k\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{5-x^2-y^2} \frac{y}{z} dzdydx$$

και

$$M = k\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{5-x^2-y^2} \frac{1}{z} dzdydx$$

Εκφράζουμε τα ολοκληρώματα (1) και (2) σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Θέτουμε:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z$$

Είναι:

$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad 1 \le z \le 5 - r^2, \quad dxdydz = r\,drd\vartheta dz$$

οπότε έχουμε:

$$M_{xz} = k\int_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{1}^{5-r^2} \frac{r^2 \sin\vartheta}{z} dz\,d\vartheta\,dr$$

και

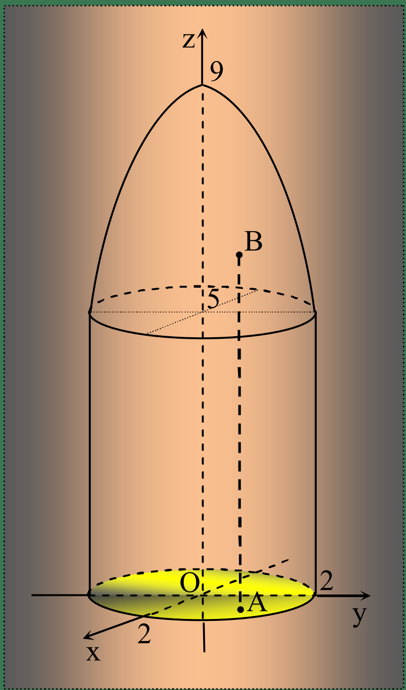
$$M = k\int_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{1}^{5-r^2} \frac{r}{z} dzd\vartheta dr$$

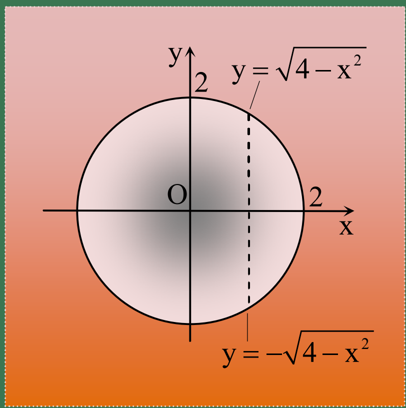
23. Στερεό S περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ το παραβολοειδές $z = 9 - x^2 - y^2$ και το επίπεδο $z = 0$. Αν η πυκνότητά του είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από την αρχή O των συντεταγμένων.

i) Να δοθεί το σχήμα

ii) Να κατασκευαστούν, χωρίς να υπολογιστούν, τα ολοκληρώματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό της z-συντεταγμένης του κέντρου μάζας τόσο σε καρτεσιανές όσο και σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Λύση





Η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=4$ και του παραβολοειδούς $z=9-x^2-y^2$ είναι ο κύκλος $x^2+y^2=4$ του επιπέδου με εξίσωση $z=9-4 \Rightarrow z=5$.

Η προβολή του στερεού S στο επίπεδο Oxy είναι το χωρίο

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\le 4\right\}.$$

Η πυκνότητα του στερεού είναι: $\delta(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των z΄z που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=0$ και $z=9-x^2-y^2$ αντίστοιχα.

Είναι λοιπόν $0 \le z \le 9 - x^2 - y^2$.

Ακόμα είναι:

$$-2 \le x \le 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$$

Η z-συντεταγμένη του κέντρου μάζας δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} \quad \text{όπου}$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\,\delta(x,y,z)\,dxdydz, \qquad (1)$$

$$M = \iiint_S \delta(x,y,z)\,dxdydz, \qquad (2)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα ολοκληρώματα (1) και (2) είναι:

$$M_{xy} = k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dzdydx$$

$$M = k\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dzdydx$$

Εκφράζουμε τα ολοκληρώματα (1) και (2) σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Θέτουμε:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z$$

Είναι:

$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 9 - r^2, \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

οπότε έχουμε:

$$M_{xy} = k\int_{0}^{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{9-r^2} \frac{z\,r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dzd\vartheta dr$$

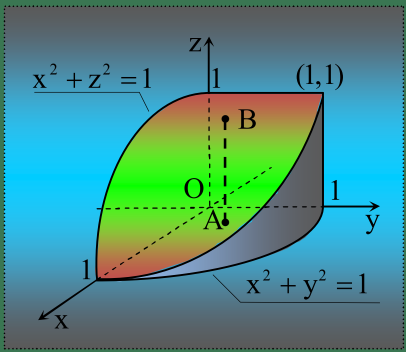
$$M = k\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{9-r^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dz\,d\vartheta\,dr$$

24. Στερεό περικλείεται από τους κυλίνδρους $x^2+y^2=1$ και $x^2+z^2=1$. Η πυκνότητα είναι ανάλογη της απόστασης από την αρχή των συντεταγμένων.

i) Να δοθεί το σχήμα στο πρώτο ογδοημόριο

ii) Να κατασκευαστούν, χωρίς να υπολογιστούν, τα ολοκληρώματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό της μάζας του στερεού που περιέχεται στο πρώτο ογδοημόριο τόσο σε καρτεσιανές όσο και σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Λύση



Το τμήμα S του στερεού που περιέχει το πρώτο ογδοημόριο περιέχεται μεταξύ

α) Των επιπέδων $z=0$, $y=0$, $x=0$.

β) Της κυλινδρικής επιφάνειας που έχει ως οδηγό καμπύλη το τεταρτοκύκλιο:

$$x^2+z^2=1,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0$$

και γενέτειρα παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.

γ) Της κυλινδρικής επιφάνειας που έχει ως οδηγό καμπύλη το τεταρτοκύκλιο $x^2+z^2=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ και γενέτειρα παράλληλη προς τον άξονα $z'z$.

Θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των $z'z$ που περνάει από ένα εσωτερικό σημείο του στερεού και τέμνει την επιφάνειά του στα σημεία A και B με $z=0$ και $z=\sqrt{1-x^2}$ αντίστοιχα, οπότε είναι $0\le z\le\sqrt{1-x^2}$.

Η προβολή του τμήματος του στερεού, που περιέχεται στο πρώτο ογδοημόριο, είναι το χωρίο $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ με } x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

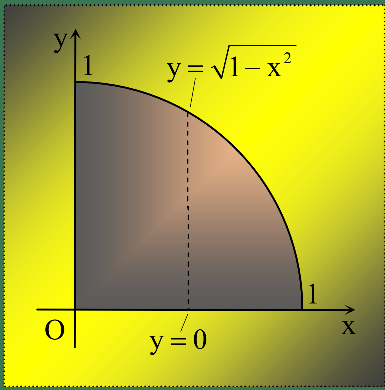
Είναι $0\le x\le 1$ και $0\le y\le\sqrt{1-x^2}$.

Η πυκνότητα είναι:

$$\delta(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Η μάζα του στερεού δίνεται από τον τύπο

$$M=\iiint\limits_S \delta(x,y,z)\,dxdydz\,,\qquad (1)$$



Σε καρτεσιανές συντεταγμένες το ολο-κλήρωμα (1) είναι:

$$M=k\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$$

Εκφράζουμε το ολοκληρώματα (1) σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Θέτουμε:

$$x=r\cos\vartheta\,,\quad y=r\sin\vartheta\,,\quad z=z$$

Είναι:

$$0\le r\le 1\,,\quad 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}\,,\quad 0\le z\le\sqrt{1-r^2\cos^2\vartheta}\,,\quad dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\vartheta\,dz$$

οπότε έχουμε:

$$M=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{1-r^2\cos^2\vartheta}} r\sqrt{r^2+z^2}\,dzd\vartheta dr$$